201	Etude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.	Th. du pt fixe (Capes), application (Sorosina)	Sorosina, Monier, De Biasi, Capes, Pommelet.

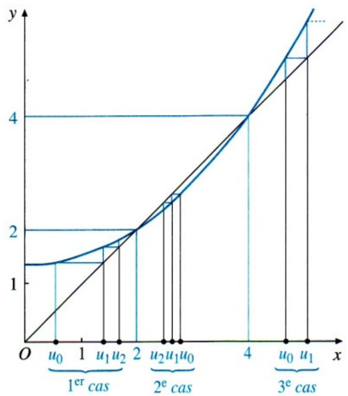
I. Suites récur. du type $u_{n+1}=f(u_n)$ ds $\mathbb{R}$.

A. Définition. (Sorosina - Monier)

Def.1: (SOR) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point,
et f une application de I dans $\mathbb{R}$ tq. $f(I)\subset I$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par: $\begin{cases} u_0\in I \\ u_{n+1}=f(u_n), n\geq 0\end{cases}$.

Exemple 1 (MON) pour $u_0\in\mathbb{R}_+$ et $u_{n+1}=\frac{1}{6}(u_n^2+8)$:



Cf. 401.

B. Etude de la monotonie. (Sor – Mon – Bia)

Prop.1:(MON)Si f est ↗ sur I, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, et son sens de variation dépend de la position relative de u_0 et u_1.
Si f est ↘ sur I, alors $f\circ f$ est ↗ sur I, donc les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones (et de sens contraires).

Méthode(SOR): On étudie le signe $f-Id$ ou de $f\circ f-Id$ dans un tableau de variations.

Exemple 1 (MON) pour $u_0\in\mathbb{R}_+$ et $u_{n+1}=\frac{1}{6}(u_n^2+8)$:

f est croissante de $\mathbb{R}_+$→ $\mathbb{R}_+$. On étudie $f-Id$ sur $\mathbb{R}_+$:

$x=u_0$	0	2		4	∞
$f(x)-x$	+	0	--	0	+
(u_n)	↗	→	↘	→	↗

Remarque: On peut aussi déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'étude de $(u_{n+1}-u_n)$.

Exemple 2: (BIA) Algo. de Héron: *Val. app. de $\sqrt{a}$, a>0.*

$u_0>0$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$. On a ∀n, $u_{n+1}-u_n<0$, suite ↘.

C. Etude d'une limite éventuelle. (De Biasi)

Prop.2:(BIA)Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l)=l$.(1)

Exemple 1 (MON) pour $u_0\in\mathbb{R}_+$ et $u_{n+1}=\frac{1}{6}(u_n^2+8)$:

Les points fixes de f sont 2 et 4.

D. Convergence.

a) Liée à la monotonie. (Monier)

Prop.3:(MON)Toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$. (2)
Les propriétés symétriques existent pour les suites ↘.

Exemple 2: (BIA) Algo. de Héron:
Suite ↘, minorée par $\sqrt{a}$, donc CV. $f(l)=l\Rightarrow l=\sqrt{a}$

b) Liée au th. du point fixe. (Capes/Sor/Pom.)

Def.2:(CAPES)Soient $X\subset\mathbb{R}$ et $f:X\to X$.
f est dite **contractante** si $\exists k\in[0;1[: \forall(x,y)\in X^2$,
$|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$.
x est un **point fixe** de f si $f(x)=x$.
(POM)En supposant f de classe C1, ce point fixe est dit **stable** (resp. quasi-stable, instable) si l'on a: $|f'(x)|<1$ (resp. $|f'(x)|=1$; $|f'(x)|>1$).

Prop.3:(CAPES)Soit I un intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}$ et $f:I\to I$ contractante.
1. f admet un unique point fixe.
2. $\forall u_0\in I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par u_0 et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$ converge vers le point fixe de f

Exemple 3 (SOR) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}:\begin{cases} u_0=a\in\mathbb{R} \\ u_{n+1}=\dfrac{\arctan(u_n)}{4+\cos(u_n)}\xrightarrow{CV}0\end{cases}$

Cf. 401.

Corollaire:(POM)Avec les hypothèses et notat° précédtes:
a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv→λ pt fixe instable de f , alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ stationne à λ.
b) Si λ pt fixe stable de f , alors ∃V voisinage de λ tq ∀u_0∈V, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ existe et converge vers λ. (3)

II. Autres types de suites récurrentes.

Les plus sples sont les suites arithmético-géométriques, $u_{n+1} = au_n + b$ *(affines du 1^er ordre à coefs constants).*

A. Suite récurrente linéaire d'ordre 2. (Monier)

On note K=ℝ ou ℂ.

Def.3:(MON)Soit (a,b)∈K². On note $E_{a,b}$ l'ens. des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ds K tq: $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, appelées suites récur. linéaires du 2nd ordre à coefs. cts.

Prop.4:(MON) $E_{a,b}$ est de dimension 2, et les suites: (U_n) tq. $U_0=1$ et $U_1=0$ et (V_n) tq. $V_0=0$ et $V_1=1$ en sont une base.

Prop.5:(MON) Soit (E): $r^2 - ar - b = 0$ l'équation caractéristique de (u_n).

Si (E) a 2 solutions*, alors $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

Si (E) a 1 solution*, alors $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n$.

Si (E) a 0 solution*,

alors $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \rho^n \left(A\cos n\theta + B\sin n\theta\right)$,où

$\rho = |r_1|, \theta = Arg(r_1)$, r_1 rac. ℂ de (E).

Exemple 4:(MON)Suite de Fibonacci (4): $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf. par:

$$\begin{cases} \phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n \end{cases}.$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \in \mathbb{N}.$$

B. Moyenne arithmético-géom.(Monier p.104)

On a ici une combinaison de 2 stes définies par récurce.

Exemple 5:(MON)**Moyenne arithmético-géométrique.**

Soient a, b ∈$\mathbb{R}_+^*$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par:

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \\ \forall n\in\mathbb{N}, \left(u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \end{cases}$$

Ces deux suites cv. vers une même limite: la moyenne arithmético-géométrique de a et b. (5)- Cf. 401.

C. Suites définies implicitement par une relation de récurrence. (Sorosina p.233)

Exemple 6:(SOR)**Intégrales de Wallis.**

Pour tout n∈ℕ, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t.dt$.

On montre que $I_n \to 0$ et que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Application: **formule de Stirling**: $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (6)

D. Suite homographique. (Sorosina p.13)

Exemple 7:(SOR)**Suite homographique.**(K=ℝ ou ℂ).

Soit u_0 ∈K. Pour tout n∈ℕ, on pose $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$,

où (a, b, c, d)∈K⁴ vérifient: c≠0 et ad-bc≠0.

Etude: On différencie 4 cas en fonction du nombre de racines de l'équation $\dfrac{al+b}{cl+d} = l$.

NB: On peut zapper ce paragraphe si manque de temps. Les suites homographiques sont traitées à fond ds le Rombaldi.

III. Conclusion.

Les suites récurrentes sont aussi utilisées pour traduire des algorithmes de calcul (algorithme d'Euclide), et ces algorithmes sont en particulier utilisées en calcul numérique (approximation d'un réel, en tant que solution d'une équation ou que valeur d'une intégrale).

IV. Notes.

(1) *La limite éventuelle est donc racine de l'équation* $f(x) = x$ *: c'est un point fixe de* f *: Cf. Def.2.*

Utilisations: Mq $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *diverge. Recherche de "candidats" pour la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

(2) *Revenir à la définition "topo" de la Cv, resp. Dv.*

***Cv**:* $\{u_n; n\in\mathbb{N}\}$ *est alors une partie de ℝ non vide et majorée, donc admet une borne Sup. notée l. On montre que* $u_n \to l$ *en partant de ∀ε>0, ∃N:* $l-\varepsilon \le u_N \le l$*.*
Comme (u_n)*↗, ∀n>N,* $|u_n - l| \le \varepsilon$*.*
***Dv**: Soit A>0, ∀N tq* $u_N > A$*.*
Comme (u_n)*↗, ∀n≥N,* $u_n \ge u_N > A$*.*

(3) On suppose $\lambda \in \overset{o}{I}$.

a) $|f'(\lambda)| > 1$. Il suffit de mq ∃p: $u_p=\lambda$, les termes suivants seront =λ par récurrence.
Par l'absurde: Supp. ∀n, $u_n \neq \lambda$.
Soit $v_n = |u_n - \lambda|$.
$f \in C^1 \Rightarrow$ ∃α>0: ∀x∈[λ-α;λ+α], |f'(x)|≥1.
Or $(u_n)\to\lambda$, donc ∃un rg N à partir duquel u_n∈[λ-α;λ+α].
Ainsi (**égalité des AF***) :
∃c∈](u_n;λ)[tq:
$v_{n+1}=|u_{n+1}-\lambda|=|f(u_n)-f(\lambda)|=|f'(c)|.|u_n-\lambda|= |f'(c)|.v_n \ge v_n$.
Ainsi la suite>0 (v_n) croît à partir du rg N, et ne peut donc converger vers 0, ce qui contredit $(u_n)\to\lambda$.
b) Fixons k∈ℝ tq. |f'(λ)|<k<1. Comme f' est continue, ∃α>0 tq. ∀x∈[λ-α;λ+α], |f'(x)|≤k.
Ainsi (**inégalité des AF***) : f est k-lipschitzienne sur J=[λ-α;λ+α]; en particulier ∀x∈J: |f(x)-f(λ)|≤k|x-λ|≤α.

Soit $u_0 \in J$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n)-f(\lambda)| \leq k^n |u_0-\lambda| \leq \alpha$
Et la suite (u_n) converge vers α.

(*) Accroissements finis:
Egalité: *Pour toute fonction réelle d'une variable réelle $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur [a, b] et dérivable]a, b[, ∃c ∈]a;b[vérifiant :* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Inégalité: *Pour toute fonction réelle d'une variable réelle $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur [a, b] et dérivable]a, b[,*
Soit $k \in \mathbb{R}$ tq. $\forall x \in]a;b[, |f'(x)| \leq k$,
alors $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq k$

(4) *L'expression explicite ("fonctionnelle") donnée est la **formule de Binet**. Elle lie la suite de Fibonacci au **Nombre d'or*** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

*La **suite de Fibonacci** doit son nom à un mathématicien italien du XIIIe siècle:*
*« Un homme met un couple de **lapins** dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? ». Ce problème est à l'origine de la suite dont le* n*-ième terme correspond au nombre de paires de lapins au* n*-ème mois.*
La suite de Fibonacci apparaît dans de nombreux problèmes de dénombrement. Par exemple, le terme d'indice n (pour n supérieur ou égal à 2) de la suite de Fibonacci permet de dénombrer le nombre de façons de parcourir un chemin de longueur n-1 en faisant des pas de 1 ou 2.
*Le **fib** est une forme de poésie s'appuyant sur la suite de Fibonacci et ressemblant au haïku. C'est un poème composé de 6 vers et comptant 20 syllabes, chacun des vers comptant autant de syllabes que chaque ligne correspondante de la séquence de Fibonacci, soit 1/1/2/3/5/8.*

La
Pluie
De mai
Aujourd'hui
A mis mon jardin
Dans la tristesse de l'automne.

(5) *Cette moyenne est aussi appelée **moyenne de Gauss**. (en fait, introduite par Lagrange?) La moyenne ar-géo est notamment associée à la longueur d'une ellipse en fonction des longueurs de ses axes. Origine: texte à vocation astronomique dans lequel Gauss cherche à déterminer l'attraction exercée sur un point par une planète dont la masse serait répartie sur tout l'orbite.*
Gauss remarqua à l'aide d'un changement de variable (très) astucieux que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$ *restait invariante en remplaçant* a *et* b *par leurs moyennes arithmétique et géométrique. Il en déduit la valeur* $\dfrac{\pi}{2M(a;b)}$.
La moyenne ar-géo est notamment associée à la longueur d'une ellipse en fonction des longueurs de ses axes. Origine: texte à vocation astronomique dans lequel Gauss cherche à déterminer l'attraction exercée sur un point par une planète dont la masse serait répartie sur tout l'orbite. Cf. 401.

(6) *Autre application: calcul de **l'intégrale de Gauss** :*
C'est l'intégrale d'une fonction gaussienne sur l'ensemble des réels. Sa valeur est reliée à la constante π par la formule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ *, où α est un paramètre réel strictement positif. Elle intervient dans la définition de la loi de probabilité appelée loi gaussienne, ou loi normale.*
*Une **fonction gaussienne** est une fonction en e^{-x^2}. Elle a une forme caractéristique de courbe en cloche. L'exemple le plus connu est la densité de probabilité de la loi normale.*
Les fonctions gaussiennes sont très utilisées en physique. En effet, nombre de phénomènes physiques suivent une distribution de type gaussien, expliqué par le théorème de la limite centrale. L'intérêt des fonctions gaussiennes en physique est également dû à certaines de leurs propriétés mathématiques remarquables. Par exemple, la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est une fonction gaussienne, ce qui entraine notamment le fait que les faisceaux lasers sont des faisceaux gaussiens.*

Le **théorème central limite établit la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne.*

Correction des exemples:
voir leçon 401 pour les exemples 1, 3, 5.
voir leçon 403 pour les exemples 1, 2, 3, 4, 5, 7.
voir leçon 436 pour l'exemple 6 (Wallis)